PROBLEMA DEL MAX CUT (TAGLIO MASSIMO)

Sia $G = (V, E)$, si vuole generare un taglio $(S, V - S)$ tale che la cardinalità dell'insieme

$|\{(u, v) \in E : u \in S, v \in V - S\}|$ è il MAX.

$\boldsymbol{APPROX\_MAX\_CUT}(G)\{$

$S \leftarrow \emptyset$
$\boldsymbol{for\ each}\ v \in V\ \boldsymbol{do}$
$\quad k \leftarrow Random(1,0)$
$\quad \boldsymbol{if}(k == 1)\boldsymbol{then}$
$\quad\quad S \leftarrow S \cup \{v\}$
$\boldsymbol{return}\ (S, V - S)$
$\}$

DIM:

Sia $(S^*, V - S^*)$, il taglio ottimo. Sia T^* sia l'insieme degli archi attraversati dal taglio, cioè

$T^* = \{(u, v) : (u, v) \in E, u \in S^*, v \in V - S^*\}$

$|T^*| \leq |E|$

Sia $T = \{(u, v) \in E : u \in S, v \in V - S\}$, dato $(u, v) \in E$, qual è la probabilità che appartenga a T?

$P_r\{(u, v) \in T\} = P_r\{u \in S\ AND\ v \in V - S\} + P_r\{u \in V - S\ AND\ v \in S\} =$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow P_r\{(u, v) \in T\} = \frac{1}{2}, \forall (u, v) \in E$

Il valore atteso è : $E[|T|] = \frac{|E|}{2}$

$$\frac{|T^*|}{E[|T|]} \leq \frac{|E|}{\frac{|E|}{2}} \leq 2$$